Cevap Anahtarı

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2008-2009
MAT 201, LİNEER CEBİR, FİNAL SINAVI
30 MART 2009

Adı Soyadı: No: İMZA:

1.	2.	3.	4.	5.	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. $L : P_2 \to P_1$ linear dönüşümü $L(at^2+bt+c) = (b-c)t + (a+b)$ kuralı ile tanımlanıyor.

a. *(6 puan)* L birebir midir? Eğer $\text{Çek}\, L = \{0\} \Rightarrow L$ 1-1 dir.

$\text{Çek}\, L = \{at^2+bt+c \mid L(at^2+bt+c) = 0\} = \{at^2+bt+c \mid (b-c)t+(a+b)=0$

Buradan $\left.\begin{array}{l} b-c=0 \\ a+b=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ b-c=0 \end{array}\right\}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ sistem eşelon formda

$n=3$, $r=2$, $n-r=1$ parametreli sonsuz çözüm var. $c=k$ olsun.
$b=k$ ve $a=-k$ olup $\text{Çek}\, L = \{-kt^2+kt+k \,;\, k \in \mathbb{R}\}$
$= \{k(-t^2+t+1) : k \in \mathbb{R}\}$ olup $\text{Çek}\, L \neq \{0\}$ olup L 1-1 değildir

b. *(9 puan)* L örten midir?

$\text{boy}\, \text{Çek}\, L + \text{boy}\, \text{Im}\, L = \text{boy}\, P_2 \Rightarrow 1 + \text{boy}\, \text{Im}\, L = 3$

$\Rightarrow \text{boy}\, \text{Im}\, L = 2$ olup $\text{boy}\, \text{Im}\, L = \text{boy}\, P_1$ olduğundan

L örtendir.

2. $L : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4$ dönüşümü $L(a,b,c,d) = (a+b+3c+2d, \quad -3a+b-5c+6d, \quad -2a+b-3c+5d, \quad c+d)$ kuralı ile tanımlanıyor.

a. *(10 puan)* L nin çekirdeğini (Çek$L$) ve çekirdeğin bir bazını bulun.

$$\text{Çek}\,L = \{ x \in \mathbb{R}_4 \ : \ L(x) = 0 \}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[2R_1+R_3 \to R_3]{3R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{3}{4}R_2+R_3 \to R_3]{\frac{1}{4}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad \text{Çek}\,L = \{ [\, 3t, -2t, -t, t \,] \ : \ t \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow \quad \{ [\, 3, -2, -1, 1 \,] \}$ Çek L nin bazı olur.

b. *(15 puan)* L nin görüntü kümesini (ImL) ve görüntü kümesinin bir bazını bulun.

$$\text{Im}\,L = \{ L(u) \ : \ u \in \mathbb{R}_4 \}$$

$$= \{ (a+b+3c+2d, \ -3a+b-5c+6d, \ -2a+b-3c+5d, \ c+d) \ : \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow \quad a[1 \ \ -3 \ \ -2 \ \ 0] + b[1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0] + c[3 \ \ -5 \ \ -3 \ \ 1] + d[2 \ \ 6 \ \ 5 \ \ 1]$$

$\Rightarrow$ <u>I. yol</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [1 \ \ -3 \ \ -2 \ \ 0], [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0], \\ [3 \ \ -5 \ \ -3 \ \ 1] \end{array} \right\}$$

bir baz olur.

$\Rightarrow$ <u>II. yol</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [1 \ \ 0 \ \ 1/4 \ \ 0], [0 \ \ 1 \ \ 3/4 \ \ 0], \\ [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1] \end{array} \right\}$$

bir baz olur.

3. *(20 puan)* Hangi a değerleri için $[3a, -7a, a^2]^T$ vektörü

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesinin gerdiği uzaya ait olur?

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ -7a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3a \\ 2 & 1 & 3 & -7a \\ 1 & 1 & 4 & a^2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 1 & 1 & -13a \\ 0 & 1 & 3 & a^2 - 3a \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 1 & 1 & -13a \\ 0 & 0 & 2 & a^2 + 10a \end{array}\right]$$

O halde $\forall a \in \mathbb{R}$ için $r[A:B] = r[A]$ dır.

4. *(15 puan)* $\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi lineer bağımsız bir küme olmak üzere $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. bağımsız ise $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ iken $c_1 = c_2 = c_3 =$ dır. Buna göre $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ lineer bağımsız mıdır?

$a_1 (v_1 + v_2) + a_2 (v_2 + v_3) + a_3 (v_1 + v_3) = 0$ iken $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ mıdır?

$$a_1 v_1 + a_1 v_2 + a_2 v_2 + a_2 v_3 + a_3 v_1 + a_3 v_3 = 0$$

$v_1 (a_1 + a_3) + v_2 (a_1 + a_2) + v_3 (a_2 + a_3) = 0$ olup sistemi çözelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{2} r_3}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup buradan $a_3 = 0$ $a_2 - a_3 = 0$ 'dan $a_2 = 0$ ve $a_1 + a_3 = 0$ 'dan $a_1 = 0$ ol. bu küme lin. bağımsızdır.

5. *(25 puan)* Aşağıda verilen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi köşegenleştirilebilir midir? Eğer köşegenleştirilebilir ise $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde P ters çevrilebilir matrisini ve D köşegen matrisini bulunuz.

$$K_A(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 \implies \lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu üç vektör lin. bağımsız olduğundan A matrisi köşegenleştirilebilir.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$