SORU 1

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm.

✓ A matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$\boxed{\det(\lambda I - A)=0}$ karakteristik denkleminin kökleri; özdeğerleri verir.

$$\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=2 \end{array}\right\} \text{özdeğerler}$$

✓ Bir kare matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler lineer bağımsızdır.

$\boxed{(\lambda_i I - A)X=0}$ homojen sistemini çözerek λ_i lere karşılık gelen özvektörler bulunur.

$$\xrightarrow{\lambda_1=-1} (\lambda_1 I - A)X=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 0x_1-2x_2-5x_3=0 \\ 0x_1+0x_2-3x_3=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=x_3=0} X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}, \quad a\neq 0$$

$$\xrightarrow{\lambda_2=1} (\lambda_2 I - A)X=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 0x_1+0x_2-5x_3=0 \\ 0x_1+0x_2-x_3=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[x_3=0]{x_2=-x_1} X_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}=b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v}, \quad b\neq 0$$

$$\xrightarrow{\lambda_3=2} (\lambda_3 I - A)X=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 0x_1+x_2-5x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-7c \quad 3c]{\substack{x_2=5x_3 \\ -3x_1=7x_3}} X_3=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7c \\ 15c \\ 3c \end{pmatrix}=c\underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w}, \quad c\neq 0$$

u, v, w lineer bağımsız (GÖSTER?)

✓ Lineer bağımsız özvektör sayısı=3 olduğundan, A köşegenleştirilebilir.

✓ P matrisinin sütunları, u, v, w özvektörleri o.z. oluşturulur.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -8/3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

✓ $$P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

SORU 2: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm:

✓ A matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$\det(\lambda I-A)=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow (\lambda-1).[(\lambda-3).\lambda+2]=0$$

$$\Longrightarrow (\lambda-1).(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

$$\Longrightarrow (\lambda-1)^2.(\lambda-2)=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=2$$

✓ Herbir özdeğere karşılık gelen özvektörleri bulalım

$(\lambda_i I-A)x=0$ homogen sistemini çözerek λ_i lere karşılık gelen özvektörler bulunur.

$$\xrightarrow{\lambda_{1,2}=1} (\lambda_1 I_3-A)x=0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 0x_1+x_2+x_3=0 \\ 0x_1-2x_2-2x_3=0 \\ 0x_1+x_2+x_3=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{x_3=-x_2} X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$=a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}+b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v}$$

birbirlerinden elde edilemezler

$$\xrightarrow{\lambda_3=2} (\lambda_3 I_3-A)X=0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=0 \\ 0x_1-x_2-2x_3=0 \\ 0x_1+x_2+2x_3=0 \end{array}\right\} \underset{x_1=x_3}{\xRightarrow{x_2=-2x_3}} X_3=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}\underset{\neq 0}{=}c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w}$$

u, v, w lineer bağımsız (GÖSTER?)

✓ Lineer bağımsız özvektör sayısı = 3 olduğundan, A köşegenleştirilebilir.

✓ P matrisinin sütunları u, v, w özvektörleri o.ş. oluşturulur.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ elde edilir.

SORU: $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir?

ÇÖZÜM:

✓ $\det(\lambda I-A)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+3)+4=0$

$\Rightarrow \lambda^2+2\lambda+1=0$

$\Rightarrow (\lambda+1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2}=-1$

✓ $(\lambda_{1,2} I-A)X=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2x_1+2x_2=0\\ -2x_1+2x_2=0\end{array}\right\} \overset{x_1=x_2}{\Longrightarrow} X_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}=\underset{\neq 0}{a}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{u}$

✓ 2 tane lineer bağımsız özvektör bulunamadığından A köşegenleştirilemez!