CEVAP ANAHTARI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2008-2009
MAT 201, LİNEER CEBİR, 2. ARASINAV
19 MART 2009

Adı Soyadı: No: İMZA:

1.	2.	3.	4.	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. *(25 puan)* $\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = 5 \\ 3x & - & y & + & \mathrm{a}z & = 2 \\ x & + & 7y & - & 6z & = \mathrm{b} \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümlerini a ve b nin durumlarına göre inceleyiniz. (Sistemi çözmeden, sadece ne zaman çözüm vardır, yoktur, sonsuz tanedir durumlarını belirleyiniz).

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & a & 2 \\ 1 & 7 & -6 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 7 & -6 & b \\ 0 & -22 & +26 & 10-4b \\ 0 & 0 & a-8 & b-8 \end{array}\right]$$

$a = 8$ → $b = 8$ ise sonsuz çözüm

$a = 8$ → $b \neq 8$ ise çözüm yok

$a \neq 8$ → tek çözüm $(b \in \mathbb{R})$

2. **a.** *(7 puan)* $L : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dönüşümü $L([x, y, z]) = [xy, yz]$ kuralı ile tanımlanıyor. L bir lineer dönüşüm müdür?

$$L([2,2,2]) = [2 \cdot 2, 2 \cdot 2] = [4,4]$$
$$L([1,1,1]) = [1 \cdot 1, 1 \cdot 1] = [1,1]$$

ve $2 \cdot [1,1] = [2,2] \neq [4,4]$ olduğundan

$c \in \mathbb{R}$, $L(c \cdot u) = cL(u)$ şartı sağlanamaz.

$\Rightarrow$ L bir lineer dönüşüm değildir.

b. *(10 puan)* $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + ky \\ y - x \end{bmatrix}$ kuralı ile tanımlanıyor. L bir lineer dönüşüm müdür?

$u, v \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

① $L(u+v) = L(u) + L(v)$ ✓

② $L(c \cdot u) = c \cdot L(u)$ olduğundan L bir lineer dönüşümdür.

veya

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ olduğundan L bir lineer dönüşümdür.

c. *(8 puan)* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $< x, y >= (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^2$ de bir **iç çarpım** olur mu?

$x = (2,2)$, $y = (1,1)$ olsun

$$<(2,2),(1,1)> = (2+1)^2 + (2+1)^2 = 18$$

$$2<(1,1),(1,1)> = 2\left((1+1)^2 + (1+1)^2\right) = 16$$

olduğundan iç çarpım olamaz.

" $c \in \mathbb{R}$, $<c \cdot x, y> = c<x,y>$ olmalıdır "

3. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ b-c \\ b+c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ olarak tanımlanıyor.

a. *(15 puan)* W için bir baz bulunuz.

$$W = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Span } W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to -\frac{1}{2} r_2]{r_2 \to r_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Baz Kümesi} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b. *(15 puan)* Gram-Schmidt metodunu kullanarak W için ortonormal bir baz bulunuz.

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, -1, -1), \quad u_3 = (0, 0, 0, 1)$$

$$v_1 = u_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 = (0, 1, -1, -1) - \frac{\langle (0,1,-1,-1), (1,1,0,0) \rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0) \rangle} (1,1,0,0)$$

$$= (0,1,-1,-1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1\right)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= (0,0,0,1) - \frac{\langle (0,0,0,1), (-1/2, \frac{1}{2}, -1, -1) \rangle}{\langle (-1/2, 1/2, -1, -1), (-1/2, 1/2, -1, -1) \rangle} \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1\right) - \frac{\langle (0,0,0,1), (1,1,0,0) \rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0) \rangle}$$

$$\times (1,1,0,0) = (0,0,0,1) + \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1\right) - 0$$

$$= (0,0,0,1) + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

4. *(20 puan)* L lineer dönüşümü; $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ve

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix}-1\\8\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$$

olarak tanımlanıyor. Buna göre

$$L\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}=?$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\8\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}c_1-c_3\\2c_1+5c_2+8c_3\\7c_2+4c_3\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&3\\2&5&8&1\\0&7&4&3\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&3\\0&5&10&-5\\0&7&4&3\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\to r_2\cdot\frac{1}{5}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&3\\0&1&2&-1\\0&7&4&3\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\to r_3-7r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&3\\0&1&2&-1\\0&0&-10&10\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\to r_3\left(-\frac{1}{10}\right)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&3\\0&1&2&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\to r_1+r_3]{r_2\to r_2-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}=c_1 L\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2 L\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}+c_3 L\begin{pmatrix}-1\\8\\4\end{pmatrix}$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$$