Cevap Anahtarı

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2008-2009
MAT 201, LİNEER CEBİR, 1. ARASINAV
19 ŞUBAT 2009

Adı Soyadı: No: İMZA:

1.	2.	3.	4.	5.	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. *(20 puan)* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ olmak üzere, A^{-1} matrisini adjoint matrisi yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{Adj} A$ olup gerekli hesaplamalarla $\det A = 1$ olarak bulunur.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ve böylece

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ olarak bulunur.

2. *(20 puan)* $\left.\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 5y & + & 2z & = 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = 12 \\ 3x & & + & & z & = 16 \end{array}\right\}$ denklem sistemini **Cramer metodunu** kullanarak çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(3-0) + 5(-1)(1-6) + 2(0-9) = 9 + 25 - 18 = 16$$

dır. $\det A \neq 0$ olduğundan verilen denklem sistemi Cramer sistemidir. Öyleyse

$$x_1 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 12 & 3 & 2 \\ 16 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\left[4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 16 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{16}.16 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\left[3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 16 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{16}.(-80) = -5$$

$$x_3 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 12 \\ 3 & 0 & 16 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\left[3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{16}.(208) = 13$$

3. *(20 puan)* $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ ve $|A| = 4$ olmak üzere, $\begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1 + 2c_1 & 5a_2 + 2c & 5a_3 + 2c_3 \\ b_1 - 5a_1 & b_2 - 5a_2 & b_3 - 5a_3 \end{vmatrix} = ?$

Çözüm: $\begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1 + 2c_1 & 5a_2 + 2c_2 & 5a_3 + 2c_3 \\ b_1 - 5a_1 & b_2 - 5a_2 & b_3 - 5a_3 \end{vmatrix} \overset{(-1)R_1+R_2\to R_2}{=} \begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1 & 5a_2 & 5a_3 \\ b_1 - 5a_1 & b_2 - 5a_2 & b_3 - 5a_3 \end{vmatrix}$

$$\overset{1R_2+R_3\to R_3}{=} \begin{vmatrix} 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5a_1 & 5a_2 & 5a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=} 2\cdot 5\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} 2\cdot 5\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 4 = 40$$

4. *(20 puan)* Derecesi 2 veya daha küçük polinomların kümesi $\mathbf{P}_2$ olmak üzere,

$$v_1 = 1 + t, \quad v_2 = 2t - 2t^2 \quad v_3 = -2 + 4t - 9t^2$$

vektörlerinin $\mathbf{P}_2$ vektör uzayında lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ iken $c_1 = c_2 = c_3 \overset{?}{=} 0$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = c_1(t+1) + c_2(-2t^2 + 2t) + c_3(-9t^2 + 4t - 2) = 0$$

$$t^2\big(0.c_1 + (-2)c_2 + (-9)c_3\big) + t(c_1 + 2c_2 + 4c_3) + (c_1 + 0c_2 - 2c_3) = 0$$

denkleminden

$$\left.\begin{aligned} 0c_1 - 2c_2 - 9c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= 0 \\ c_1 + 0c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -9 & : & 0 \\ 1 & 2 & 4 & : & 0 \\ 1 & 0 & -2 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 1 & 2 & 4 & : & 0 \\ 0 & -2 & -9 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 2 & 6 & : & 0 \\ 0 & -2 & -9 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & : & 0 \\ 0 & -2 & -9 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{3} r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

olup buradan $c_3 = 0$, $c_2 + 3c_3 = 0$ 'dan $c_2 = 0$ ve

$c_1 - 2c_3 = 0$ 'dan $c_1 = 0$ bulunur.

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olduğundan P_2 'de verilen bu 3 vektör lineer bağımsızdır.

5. $\mathbb{R}^3$, 3×1 lik matrisler kümesi olmak üzere, aşağıdaki kümelerin $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı olup olmadığını gösteriniz.

a. *(10 puan)* $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a = 2b - c \text{ ve } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

① ⊕ işlemine göre kapalılık

$u, v \in W_1$ olsun. $u = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow u \oplus v = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}$

$a_1 = 2b_1 - c_1$ ve $a_2 = 2b_2 - c_2$ olduğundan $a_1+a_2 = 2(b_1+b_2) - (c_1+c_2)$ olur.

$\Rightarrow u+v \in W_1$

② ⊙ işlemine göre kapalılık

$k \neq 0, k \in \mathbb{R}, u \in W_1 \Rightarrow k \odot u = k \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix}$, $a = 2b - c \Rightarrow k \cdot a = 2kb - kc$ olur

$\Rightarrow k \odot u \in W_1$

$\Rightarrow W_1$ alt uzaydır.

b. *(10 puan)* $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 5 \\ c \end{bmatrix} : a = 3c \text{ ve } a, c \in \mathbb{R} \right\}$

$u = \begin{bmatrix} a_1 \\ 5 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} a_2 \\ 5 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow u \oplus v = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 10 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} \notin W_2$

$\Rightarrow W_2$ alt uzay değildir.