TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, GÜZ DÖNEMİ 2009-2010
MAT 201, DOĞRUSAL CEBİR, 2. ARASINAV
11 KASIM 2009

Adı Soyadı: No: İMZA:

1.	2.	3.	4.	5.	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. *(25 puan)* $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisinin satır uzayının bir **bazını** (tabanını) bulunuz ve **rankını** hesaplayınız.

1. yol

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[7R_3+R_1 \to R_1]{3R_3+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_1 \to R_1]{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} +1 & +2 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \{[1 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 3], [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -2]\}$ satır uzayının bir bazı olur.

$\Longrightarrow$ $\text{Rank}(A) = 2$ olur.

2. yol A^T indirgenebilir. Sonuçta lineer bağımsız çıkan vektörler

$\{[-1 \;\; -2 \;\; -7 \;\; 11], [1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -5]\}$ olur.

2. *(25 puan)* $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a-b+c \\ a+b+2c \\ a+c \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ alt vektör uzayının bir bazını (tabanını) bulunuz ve Gram-Schmidt metodunu kullanarak bu bazı ortonormal bir baza çeviriniz.

$$\begin{bmatrix} 2a-b+c \\ a+b+2c \\ a+c \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$\Rightarrow$ $W = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ olur.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ün lineer bağımsız en büyük alt kümesini bulalım

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{-2R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O halde ilk iki vektör lineer bağımsız. $\to \{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow$ Baz kümesi $= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ olur.

<u>Gram-Schmidt</u>: $a_1 = v_1$, $a_2 = v_2 - \dfrac{(v_2, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1$

$$\Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 7/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

a_2 yerine $6a_2$ alınabilir $\Rightarrow$ $a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\{w_1, w_2\}$ ortonormal baz. $w_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{66} \end{bmatrix}$

3. *(13 puan)* Bir V alt vektör uzayında $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu biliniyor. Aşağıdaki kümelerin her birinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

a. $\{\alpha_2, \alpha_3\}$ **b.** $\{\alpha_1 + 2\alpha_2,\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3,\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3\}$.

a. $\{\alpha_2, \alpha_3\}$, S kümesinin alt kümesi olduğundan

lineer bağımsızdır.

NOT: $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ denkleminin tek çözümü

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ olduğundan

$c_1\alpha_2 + c_2\alpha_3 = 0$ denkleminin de tek çözümü

vardır ve $c_1 = c_2 = 0$ dır.

b. $v_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

$v_2 = 2\alpha_2 - 2\alpha_3$

$v_3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$

$\Rightarrow$ $1 \cdot v_1 + \frac{1}{2} v_2 - v_3 = 0$ dır.

Yani v_1, v_2, v_3 lineer bağımlıdır.

NOT: $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ denklemine bakılırsa,

sonsuz çözüm olduğu görülür, ve buradan da

v_1, v_2, v_3 ün lineer bağımlı olduğu söylenebilir

4. *(12 puan)* Aşağıdaki ifadelerin **sadece** doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz.

Y a. $P = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayının bir bazı $S = \{1, x, x + x^2, 2x + 1\}$ dir.

D b. $Q = \{ax^2 + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayının boyu 2 dir.

D c. $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için ortogonal (dik) bir bazdır.

Y d. $\{1, x^2, x^2 + 1\}$ ve $\{1, x, x - 1\}$ kümelerinin gerdiği (span) uzaylar aynıdır.

5. *(25 puan)* Aşağıda verilen kümelerin alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

a. $A = \left\{ \begin{bmatrix} -4a \\ 4a^2 \\ 5a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ b. $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3t - s \\ 2s + 3t \\ t - s \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) A, Alt vektör uzayı değildir

$a=1$ için $v_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in A$

$a=2$ için $v_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix} \in A$

Fakat $v_1 + v_2 \notin A$, çünkü

$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -4a \\ 4a^2 \\ 5a \end{bmatrix}$

(b) B, Alt vektör uzayıdır.

$v_1 = \begin{bmatrix} 3t_1 - s_1 \\ 2s_1 + 3t_1 \\ t_1 - s_1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3t_2 - s_2 \\ 2s_2 + 3t_2 \\ t_2 - s_2 \end{bmatrix} \in B$

ise

(1) $v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 3t_1 - s_1 + 3t_2 - s_2 \\ 2s_1 + 3t_1 + 2s_2 + 3t_2 \\ t_1 - s_1 + t_2 - s_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3(t_1+t_2) - (s_1+s_2) \\ 2(s_1+s_2) + 3(t_1+t_2) \\ (t_1+t_2) - (s_1+s_2) \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} t = t_1 + t_2 \\ \text{ve} \\ s = s_1 + s_2 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 3t - s \\ 2s + 3t \\ t - s \end{bmatrix} \in B$

(2) $c \in \mathbb{R}$ ise

$c \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 3ct_1 - cs_1 \\ 2cs_1 - 3ct_1 \\ ct_1 - cs_1 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} ct_1 = t \\ \text{ve} \\ cs_1 = s \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 3t - s \\ 2s + 3t \\ t - s \end{bmatrix} \in B$