GÖZÜMLER

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, YAZ DÖNEMİ 2008-2009
MAT 102, MATEMATİK II, 2. ARA SINAVI
04 TEMMUZ 2009

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

Adı Soyadı: No: İMZA:

1.	2.	3.	4.	5.	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 105 dakikadır. Başarılar.

1. f fonksiyonu $f(x,y) = xe^{y+x^2}$ olarak tanımlanıyor.

a. *(10 puan)* f fonksiyonunun, $(2,-4,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

$x_0 = 2$, $y_0 = -4$ ve $z_0 = 2$; Teğet denk: $\boxed{z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$

$f_x(x,y) = e^{y+x^2} + 2x^2e^{y+x^2}$; $f_x(2,-4) = 9$

$f_y(x,y) = xe^{y+x^2}$; $f_y(2,-4) = 2$

$(2,-4,2)$ noktasındaki teğet denklemi:

$z - 2 = 9(x-2) + 2(y+4)$

$\therefore \boxed{9x + 2y - z - 8 = 0}$

b. *(10 puan)* $f(2.05, -3.92)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$x_0 = 2$, $y_0 = -4$, $\Delta x = 0{,}05$ ve $\Delta y = 0{,}08$ alınırsa;

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$ formülünden

$f(2{,}05, -3{,}92) \approx f(2,-4) + f_x(2,-4) \cdot 0{,}05 + f_y(2,-4) \cdot 0{,}08$

$= 2 + 9 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}08$

$= 2 + 0{,}45 + 0{,}16$

$= 2{,}61$

7

2.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^2-x^2y^2+5y^2}{x^2+y^2} & \text{eğer } (x,y)\neq(0,0) \text{ ise}\\[2ex] \dfrac{5}{2} & \text{eğer } (x,y)=(0,0) \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a. *(7 puan)* $(x,y)\neq(0,0)$ iken f fonksiyonu sürekli midir? Neden?

$(x,y)\neq(0,0)$ iken $f(x,y)=\dfrac{5x^2-x^2y^2+5x^2}{x^2+y^2}$ olup bir rasyonel fonksiyondur. Bu fonksiyon $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ cümlesi üzerinde tanımlı olduğundan, $\forall(x,y)\neq(0,0)$ için süreklidir.

b. *(13 puan)* $(x,y)=(0,0)$ için f fonksiyonu sürekli midir? Neden?

$(x,y)=(0,0)$ için $f(x,y)=f(0,0)=\dfrac{5}{2}$ olup bu noktada tanımlıdır.

I. yol

Fakat $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ alınarak $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

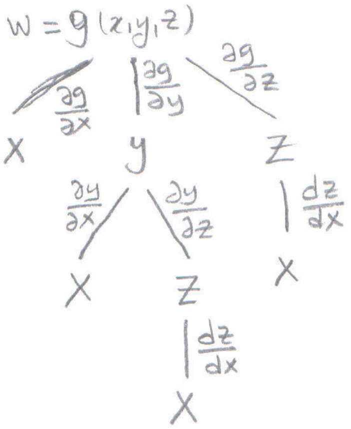
$$=\lim_{r\to 0}\frac{5r^2-r^4\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}\, 5-r^2\cos\theta\sin\theta=5\neq\frac{5}{2}=f(0,0)$$

olduğundan $(0,0)$ noktasında fonksiyon sürekli değildir.

II. yol

Not: Eğer x ekseni boyunca $(0,0)$'a yaklaşılırsa (bu durumda $(x,y)=(x,0)$, $x\neq 0$) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-x^2 0^2+5 0^2}{x^2+0^2}=\lim\limits_{x\to 0} 5=5\neq\dfrac{5}{2}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

3. **a.** *(10 puan)* $w=g(x,y,z)=xyz^2$; $y=x+5+\ln(z+x^2)$, $z=e^x$ ise, zincir kuralı yardımıyla, $\dfrac{dw}{dx}$ türevinin $x=0$ noktasındaki değerini hesaplayınız.



$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=w_x+w_y\cdot y_x+w_y\cdot y_z\cdot z_x+w_z\cdot z_x$$

$$=yz^2+xz^2\cdot\left(1+\frac{2x}{z+x^2}\right)+xz^2\left(\frac{1}{z+x^2}\right)e^x+2xyz\,e^x$$

$$=\left(x+5+\ln(e^x+x^2)\right)e^{2x}+xe^{2x}\left[1+\frac{2x}{e^x+x^2}\right]+\left(\frac{xe^{2x}}{e^x+x^2}\right)e^x+2xe^{2x}\cdot\left(x+5+\ln(e^x+x^2)\right)$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0}=5+0+0+0=5$$

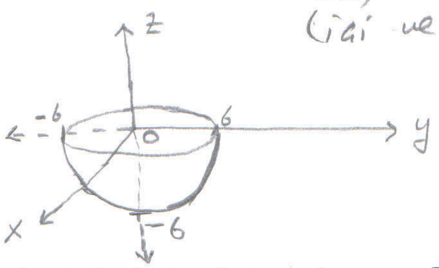
7

b. *(10 puan)* $z = f(x,y) = -\sqrt{36 - x^2 - y^2}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü (değer) kümelerini bulunuz. **Kabaca** grafiğini çiziniz.

$TC_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 36 - x^2 - y^2 \geq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq (6)^2 \}$

(0,0) merkezli, 6 br yarıçaplı kapalı (içi ve üzeri dahil) daire

$DC_f = [-6, 0] \subset \mathbb{R}$



4. f fonksiyonu $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$ olarak tanımlanıyor. $P_0 = (1,1,1)$ olmak üzere

a. *(7 puan)* f fonksiyonunun, P_0 noktasındaki gradyan vektörünü $(\nabla f|_{P_0})$ bulunuz.

$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \left(:= f_x i + f_y j + f_z k \right)$

$= \langle \frac{1}{x} + 0 + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + 0, 0 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \rangle = 2 \langle \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \rangle$

$\nabla f \Big|_{P_0} = \nabla f(1,1,1) = 2 \langle 1,1,1 \rangle = \langle 2,2,2 \rangle$

b. *(3 puan)* f fonksiyonu, P_0 noktasında hangi yönde en hızlı azalır ve bu yöndeki değişim hızı nedir?

$-\nabla f|_{P_0} = \langle -2, -2, -2 \rangle$ vektörü yönünde en hızlı azalır ve bu yöndeki değişim hızı $\left| \nabla f|_{P_0} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$

c. *(10 puan)* f fonksiyonunun, $\vec{v} = i + 2j + 2k$ vektörü yönündeki yönlü türevini $(D_{\vec{v}} f(P_0))$ bulunuz.

$|\vec{V}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \neq 1$ olup birim vektör değildir. İhtiyacımız olan birim vektör : $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{3} \langle 1,2,2 \rangle = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ 'dür.

$D_{\vec{v}} f(P_0) = \nabla f \Big|_{P_0} \cdot \vec{u} = \langle 2,2,2 \rangle \cdot \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$

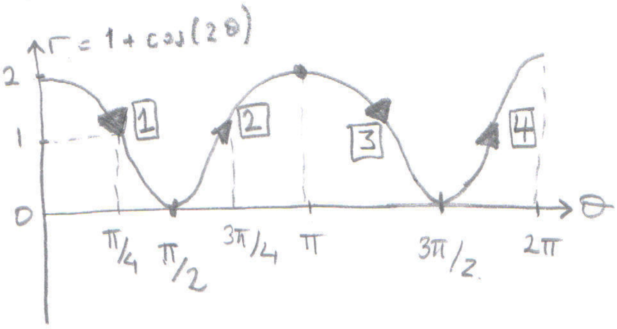
$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$

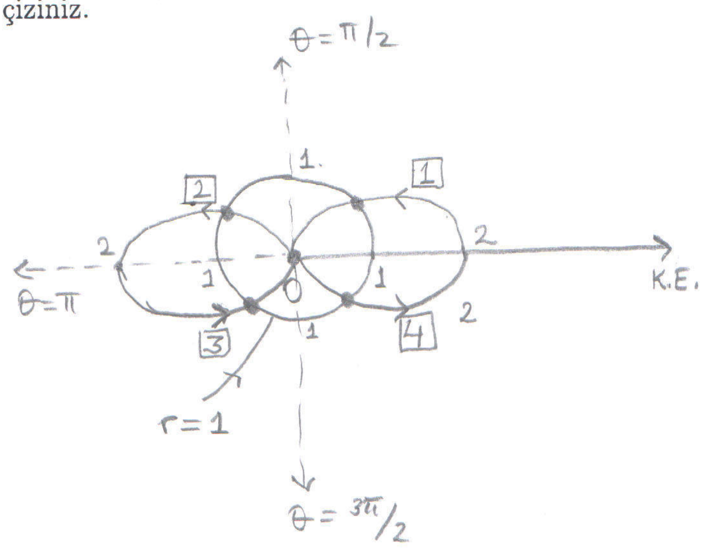
$= \frac{10}{3}$

7

5. **a.** *(8 puan)* $r = 1$ çemberini ve $r = 1 + \cos(2\theta)$ eğrisini çiziniz.

r = 1 bir çember verir





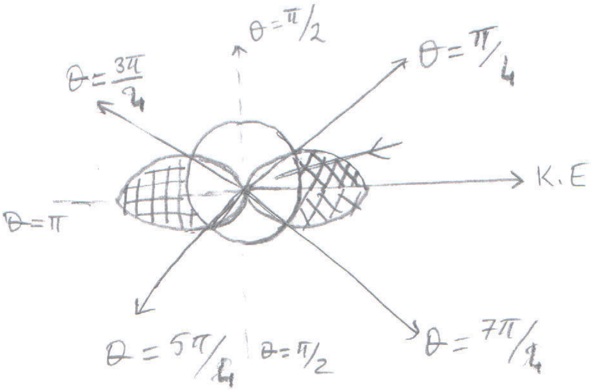
b. *(4 puan)* Çemberle eğrinin kesim noktalarını bulunuz.

$r=1$ ve $r = 1+\cos 2\theta$ eğrileri eşitlenirse $1 = 1+\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 0$

$\cos 2\theta = 0 \Longleftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$, $2\theta = \frac{3\pi}{2}$, $2\theta = \frac{5\pi}{2}$ ve $2\theta = \frac{7\pi}{2}$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ve $\theta = \frac{7\pi}{4}$ iken eğriler birbirini keser.

c. *(8 puan)* Eğrinin içinde ve çemberin dışında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



$$\text{Alan} = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{1}{2} \left[(r_{dış})^2 - (r_{iç})^2 \right] d\theta$$

$$= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) - 1\right) d\theta$$

$$= 2 \left[\int_{\theta=0}^{\pi/4} 2\cos 2\theta \, d\theta + \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta \right]$$

$$\boxed{\cos(4\theta) = 1 - 2\cos^2(2\theta)}$$

$$\boxed{\cos^2(2\theta) = \frac{1-\cos(4\theta)}{2}}$$

$$= 2 \left[\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/4}$$

$$= 2 \left[1 + \frac{\pi}{8} - 0 \right] = \boxed{\frac{8+\pi}{4} \ br^2}$$