Mat 102 - Matematik II / Calculus II
Çalışma Soruları

Seriler

> `wolframalpha.com` kodu.
> Bir seriyi: `sum_{n = 1}^{\infty}  (ln n)/n`
> kodu ile ele alabilirsiniz.

1) Aşağıda verilen serilerin yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz. Yakınsak seriler için toplamlarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}3^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{4^k}\right)$

2) Aşağıda verilen serilerin karakteristiğini belirleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k\ln k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$

3) Verilen serilerin yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{k^2+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k^4+2k-1}{k^5+3k^2+1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+2}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k}$

4) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. Yakınsak olanların (toplamını) değerini bulunuz.

a) $1+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{8}-1-\frac{1}{16}+\cdots$ (ıraksak) b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$ (yak. ve 3)

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$ $\left(\text{yak. ve } \frac{e^2}{e^2-1}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ (ıraksak)

e) $0.\overline{91} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 91\left(\frac{1}{100}\right)^n$ $\left(\text{yak. ve } \frac{91}{99}\right)$ f) $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+\cdots$ (yak. ve 1)

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^n\pi^{1-n}$ $\left(\text{yak. ve } \frac{\pi^2}{\pi-e}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (yak. ve 1/4)

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1)-\arctan(n))$ (yak. ve $\pi/4$)

5) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksaklıklarını belirleyiniz, nedenlerini açıklayınız.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$ (yak.) b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ (ıraksak) c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n^2+3)}}$ (ıraksak)

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n-1}$ (yak.) e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2-5}$ (yak.) f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (yak.)

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$ (yak.) h) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$ (ıraksak) i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$ (ırak.)

6) Aşağıdaki serilerin ıraksaklıklarını veya yakınsaklık türlerini belirleyiniz.

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$ (şart. yak.) b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}}$ (mut. yak.)

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (şart. yak.) d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ (ıraksak)

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$ (şart. yak.) f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (şart. yak.)

7) Aşağıdaki serilerin yakınsaklıklarını veya ıraksaklıklarını belirleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^5}$ (yak.) b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}}$ (yak.) c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^n}$ (ırak.)

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$ (yak.) e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ (ıraksak)

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$, ($c \in \mathbb{R}$ olmak üzere) olduğunu gösteriniz.

8) Alterne Seriler ile ilgili Bonus Sorular:

(a) $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \in 2\mathbb{N}+1 \\ 3^{-n}, & n \in 2\mathbb{N} \end{cases}$ şeklinde tanımlanmış a_n dizisi için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ alterne serisi yakınsak mıdır?

(b) $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \in 2\mathbb{N} \\ n^{-1}, & n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanmış a_n dizisi için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ alterne serisi yakınsak mıdır?

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2+(-1)^n)}$ alterne serisi yakınsak mıdır?

(d) $a \in \mathbb{R}$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ alterne serisi yakınsak mıdır?

(e) $a \in \mathbb{R}$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}$ alterne serisi yakınsak mıdır?

(**f***) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$ alterne serisi yakınsak mıdır?

Kuvvet Serileri

> `wolframalpha.com` kodu.
> Bir seriyi: `sum_{n = 1}^{\infty}  (x^n / sqrt(n) )`
> kodu ile ele alabilirsiniz. Serinin hangi aralıkta yakınsak olduğu mutlak değer fonksiyonu ile verilir. Ancak uç noktalarını kontrol etmeniz gerekmektedir.

1) Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık kümelerini ve yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$ $\quad((-\infty,\infty),\ R=\infty)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ $\quad([-1,1),\ R=1)$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ $\quad([-1,1],\ R=1)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)x^n$ $\quad\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ R=\frac{1}{2}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}(x+5)^n$ $\quad([-6,-4),\ R=1)$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 10^n\left(\frac{x-1}{5}\right)^n$ $\quad\left(\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\ R=\frac{1}{2}\right)$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$ $\quad([3,5],\ R=1)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}x^{4n}$ $\quad((-1,1),R=1)$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\cdots+2^n)\,x^n$ $\quad\left(\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),R=\frac{1}{2}\right)$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{3^{n^2}}$ $\quad(\mathbb{R},R=\infty)$

Maclaurin ve Taylor serileri

> `wolframalpha.com` kodu.
> $\dfrac{x}{2x+1}$ in Maclaurin seri açılımı için: `Maclaurin series x/(2x + 1)`
> $\ln x$ in $x=1$ deki Taylor seri açılımı için: `taylor series ln x at x=1`
> kodlarını kullanabilirsiniz.

1) Aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin Serilerini bulunuz.

a) $\dfrac{x}{2x+1}$ b) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ c) $\dfrac{x^2}{1-x^3}$ d) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

e) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ f) $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)$ *g) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

2) Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktadaki Taylor seri açılımını bulunuz.

a) $\ln x$ fonksiyonunun $x = 1$ deki;

b) $\sin x$ fonksiyonunun $x = \dfrac{\pi}{2}$ etrafındaki;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nin $x = 1$ etrafındaki;

d) $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki;

Hata Tahmini Teoremi:

> *a ile x arasındaki her t değişkeni için $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$ olacak şekilde M sabiti mevcutsa, n. dereceden Taylor polinomundan elde edilen $R_n(x)$ kalan terimi aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir*
>
> $$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$