TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2014-2015 BAHAR DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, ARA SINAVI
27 ŞUBAT 2015

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. *(10 p.)*	**2.** *(10 p.)*	**3.** *(10+10+10 p.)*	**4.** *(15 p.)*	**5.** *(15 p.)*	**6.** *(20 p.)*	**TOPLAM**

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. $y = e^x(x^2+1) + \ln(x^2-5) + \tan(\cos x) + \pi^3$ olmak üzere $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3}$ ifadesini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^x(x^2+1) + 2xe^x\right) + \frac{2x}{x^2-5} + \sec^2(\cos x)(-\sin x) + 0$$

olup

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} &= (10e^3 + 6e^3) + \frac{6}{4} - \sec^2(\cos 3)\cdot\sin 3 \\ &= 16e^3 + \frac{3}{2} - \sec^2(\cos 3)\cdot\sin 3\end{aligned}$$

bulunur.

2. $x^3 - 2\sqrt{x-y} = x\sin y$ denklemi ile kapalı olarak verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesini bulunuz.

Çözüm: Eşitliğin iki tarafının da x e göre türevini alırsak

$$3x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-y)^{-1/2}\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = \sin y + x\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

olup

$$3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-y}} - \sin y = \left(x\cos y - \frac{1}{\sqrt{x-y}}\right)\frac{dy}{dx}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-y}} - \sin y}{x\cos y - \frac{1}{\sqrt{x-y}}} = \frac{(3x^2-\sin y)\sqrt{x-y}-1}{x\sqrt{x-y}\cos y - 1}$$

bulunur.

3. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) hesaplayınız. L'Hôpital kuralını kullanmayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1+e^{x-\sin x}}{101x^2-2\cos x}$

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1+e^{x-\sin x}}{101x^2-2\cos x} = \frac{-1+e^0}{0-2\cdot 1} = \frac{-1+1}{-2} = 0$$

bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right)$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4-x^2})(\sqrt{x^4+2x^2}+\sqrt{x^4-x^2})}{\sqrt{x^4+2x^2}+\sqrt{x^4-x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2-x^4+x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+\sqrt{x^4-x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x\sin(x-1)}{x^2-5x+4}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2x\sin(x-1)}{x^2-5x+4} &= \lim_{x\to 1} \frac{2x\sin(x-1)}{(x-4)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-4} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-4} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \\
&= \frac{2}{-3} \cdot 1 \\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. Bir çemberin yarıçapı $2cm/sn$ sabit hızla büyüyor. Çevre uzunluğu $200\pi\ cm$ olduğunda, çemberin alanındaki değişim hızı nedir?

Çözüm: Çemberin yarıçapı r ve alanı A olsun. Bu durumda $\dfrac{dr}{dt} = 2$ ve $2\pi r_0 = 200\pi$ olarak verilmiştir. (Burada t zaman değişkenidir.) Ayrıca $A = \pi r^2$ eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= 4\pi r \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r_0=100} = 4\pi \cdot 100 = 400\pi$$

olup değişim hızı $400\pi\ cm/sn$ olarak bulunur.

5. $\sqrt[3]{27,1}$ ifadesinin yaklaşık değerini lineer yaklaşım veya diferansiyel yaklaşım yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm: $f(x) = x^{1/3}$ seçersek $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'(27) = \frac{1}{3}\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$ ve $f(27) = 3$ olup, f nin $x = 27$ noktasındaki lineerleştirmesi

$$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27,1} = f(27,1) \approx L(27,1) &= 3 + \frac{0,1}{27} \\ &= 3,\overline{037} \end{aligned}$$

bulunur.

6. a) $\mathbb{R}$ de sürekli, fakat sadece $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ de türevlenebilir bir fonksiyon yazınız. Nedenini kısaca açıklayınız.

Çözüm: $f(x) = |x-2|$ fonksiyonu her yerde süreklidir, fakat $x = 2$ noktasında sağ türevi $+1$ ve sol türevi -1 olup bu noktada türevi yoktur.

Dolayısıyla istenilen şartları sağlamaktadır.

b) $\mathbb{R}$ de sürekli, fakat sadece $\mathbb{R}\backslash\{-37, 37\}$ de türevlenebilir bir fonksiyon yazınız. Nedenini kısaca açıklayınız.

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} -x-37, & x \leq -37 \\ (37-x)(37+x), & -37 < x \leq 37 \\ x-37, & x > 37 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon heryerde süreklidir (sebebi $x = -37$ ve $x = 37$ de sağ ve sol limitleri 0 olup eşittir),

fakat $x = -37$ de sol türev -1 ve sağ türev $-2 \cdot (-37) = 74$ olup türevi yoktur. Benzer şekilde $x = 37$ de sol türev $-2 \cdot 37 = -74$ ve sağ türev 1 olup türevi yoktur.

Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonun istenilen şartları sağlamaktadır.