TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, GÜZ DÖNEMİ 2014-2015
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
08 ARALIK 2014

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (10+10 p.)	**2.** (15 p.)	**3.** (7+8 p.)	**4.** (15+10 p.)	**5.** (15+10 p.)	**TOPLAM**	

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. a)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \text{ ise,} \\ \dfrac{8}{x} + a, & 2 \le x < 4 \text{ ise,} \\ \sqrt{x-4} + b, & x \ge 4 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlanıyor.}$$

$f(x)$ in sürekli bir fonksiyon olabilmesi için a ve b hangi değerleri alabilir? Cevabınızı açıklayınız.

Çözüm: Sürekli olması için her noktada limiti mevcut ve o noktadaki değeri eşit olması lazım. Üç parçalı fonksiyon verilen aralıklarında (uç noktalar hariç) sürekli olduğunu görüyoruz. O halde sadece $x = 2$ ve $x = 4$ uç noktalarına bakmamız yeterli.

$x = 2$ için sağ limit: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{8}{x} + a\right) = 4 + a$, sol limit: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+1) = 3$ ve noktadaki değeri $f(2) = \frac{8}{2} + a = 4 + a$ olup $4 + a = 3 = 4 + a$ veya $a = -1$ elde ediyoruz.

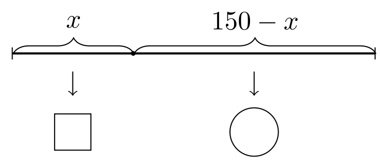
$x = 4$ için sağ limit: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(\sqrt{x-4} + b\right) = b$, sol limit: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\frac{8}{x} + a\right) = 2 + a = 1$ ve noktadaki değeri $f(4) = \sqrt{4-4} + b = b$ olup $b = 1$ bulunur.

b) $g(x) = x^3 - x^2 + 1$ fonksiyonunun en az bir reel kökünün var olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $g(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$ ve $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$ olup işareti farklı iki nokta bulmuş olduk. Ayrıca $g(x)$ polinom olduğundan her yerde sürekli olup ara değer teoremi gereği $g(x)$ fonksiyonu $g(-1) = -1$ ile $g(1) = 1$ arasındaki tüm değerleri alır, dolayısıyla en az bir noktada $g(x) = 0$ olur. Yani en az bir kökü vardır.

2. Uzunluğu 150 cm olan bir tel parçası, iki parçaya ayrılıyor. Birinci parçadan bir kare, ikinci parçadan ise yarıçapı r olan bir çember yapılıyor. Bu iki şeklin alanları toplamının minimum olması için her bir parçanın uzunluğunun ne olması gerektiğini türev yardımıyla bulunuz.

Çözüm: Şekildeki gibi x ve $150 - x$ olacak şekilde ikiye parçaladığımızı düşünelim.



Bu durumda karenin çevre uzunluğu $4a = x$ ve çemberin çevre uzunluğu $2\pi r = 150 - x$ olur. Bu durumda iki cismin alanı $f(x) = a^2 + \pi r^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{150-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{150^2 - 300x + x^2}{4\pi}$ olup $f(x)$ fonksiyonunu minimize etmemiz gerekiyor. x bir uzunluk olduğundan $0 \le x \le 150$ olduğunu görebiliyoruz. Ayrıca $f(x)$ sürekli olduğundan bulacağımız kritik noktalar ve uç noktalardaki değerleri kıyaslayarak minimumu bulabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{16} - \frac{300}{4\pi} + \frac{2x}{4\pi} \\ &= \frac{x}{8} - \frac{75}{\pi} + \frac{x}{2\pi} \\ &= x\left(\frac{\pi+4}{8\pi}\right) - \frac{75}{\pi} \end{aligned}$$

olup

$$x_0 = \frac{75/\pi}{(\pi+4)/(8\pi)} = \frac{600}{\pi+4}$$

tek kritik nokta bulunur. $f(0) = \left(\frac{150}{2\pi}\right)^2 \pi = \frac{150^2}{4\pi}$, $f(150) = \frac{150^2}{16}$ ve $f(x_0) = f\left(\frac{600}{\pi+4}\right) = \frac{150^2}{4(\pi+4)}$ olup en düşük değeri veren x_0 olduğundan istenilen parça uzunlukları x_0 ve $150 - x_0$ dır.

(Not: x_0 noktasının en düşük değeri verdiğini 1.türev tablosuna bakarak da görebiliriz.)

3. a) $x^2 + (y-1)^2 = 4$ denklemini kutupsal koordinatlarda ifade ediniz.

Çözüm: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ eşitliklerini denklemde yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 1)^2 &= 4 \\ r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta + 1 &= 4 \\ r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - 2r\sin\theta + 1 &= 4 \\ r^2 - 2r\sin\theta + 1 &= 4 \\ r^2 - 2r\sin\theta - 3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. İstenilen denklem en son denklemdir.

b) $r = \cot\theta\csc\theta$ denklemini kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

Çözüm: $r = \cot\theta\csc\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\theta}$ olup $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ eşitliklerinde $\sin\theta$ ile $\cos\theta$ yı çekerek denklemde yazarsak $r = \frac{x/r}{y/r}\frac{1}{y/r}$ olup $r = \frac{xr}{y^2}$ veya $x = y^2$ bulunur.

(Not: burada r yi sadeleştirmemizin sebebi son denklemde orijinin mevcut olması).

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+4)}dx$

Çözüm: Rasyonel polinomu basit kesirlere ayırmaya çalışırsak:

$$\frac{3x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)} = \frac{(A+B)\,x^2+(C-B)\,x+4A-C}{(x-1)(x^2+4)}$$

olup

$$\begin{cases} A+B=3 \\ C-B=3 \\ 4A-C=-1 \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklemi çözersek $A=1, B=2, C=5$ bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+4)}dx &= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+4)}dx \\
&= \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{2x+5}{(x^2+4)}dx \\
&= \ln(x-1) + \int \frac{2x}{(x^2+4)}dx + \int \frac{5}{(x^2+4)}dx \\
&= \ln(x-1) + I_1 + I_2 + sabit
\end{aligned}$$

diyelim ve sondaki iki integrali hesaplayalım: I_1 için $u = x^2+4$ değişken değiştirmesi yaparsak $du = 2xdx$ olup

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{2x}{(x^2+4)}dx = \int \frac{du}{u} \\
&= \ln u + sabit = \ln\left(x^2+4\right) + sabit
\end{aligned}$$

olur. I_2 için $x = 2\tan\theta$ değişken değiştirmesi yaparsak $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ olup

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{5}{(x^2+4)}dx = \int \frac{5}{4\sec^2\theta}2\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{5}{2}\int d\theta = \frac{5}{2}\theta + sabit \\
&= \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + sabit
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla bizden istenilen integral değeri:

$$\ln(x-1) + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + sabit$$

elde edilir.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

Çözüm: $x = \tan\theta$ değişken değiştirmesi yaparsak $dx = \sec^2\theta d\theta$ olup

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^{3/2}} \\
&= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^{3/2}} \\
&= \int \frac{d\theta}{\sec\theta} \\
&= \int \cos\theta d\theta \\
&= \sin\theta + sabit \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + sabit
\end{aligned}$$

elde edilir.

5. Aşağıdaki integrali ve limiti hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^9 e^{\sqrt{x}}dx$

Çözüm: $a = \sqrt{x}$ değişken değiştirmesi yapalım: $da = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ olup integrali a değişkeni cinsinden yazarsak

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{9} e^{\sqrt{x}}dx &= \int_{a=0}^{3} e^a \cdot 2a \cdot da \\ &= 2\int_{a=0}^{3} ae^a da\end{aligned}$$

olup bu adımda kısmı integrasyon yaparsak: $a = u$, $e^a da = dv \Rightarrow da = du$, $e^a = v$ olup

$$\begin{aligned}2\int_{a=0}^{3} ae^a da &= 2ae^a\Big|_{a=0}^{a=3} - 2\int_{a=0}^{3} e^a da \\ &= 6e^3 - 0 - 2\left(e^a\Big|_{a=0}^{a=3}\right) \\ &= 6e^3 - 2\left(e^3 - 1\right) \\ &= 4e^3 + 2\end{aligned}$$

bulunur.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e^{6x} + 11x\right)^{\frac{17}{x}}$

Çözüm: Soruya baktığımız zaman ∞^0 belirsizliği olduğunu görüyoruz. O zaman logaritma özelliklerinden faydalanacak olursak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(e^{6x} + 11x\right)^{\frac{17}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(e^{6x}+11x\right)^{\frac{17}{x}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{17}{x}\ln\left(e^{6x}+11x\right)} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{17\ln\left(e^{6x}+11x\right)}{x}} && \text{(çünkü } e^x \text{ sürekli fonksiyon)} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{17\left(6e^{6x}+11\right)/\left(e^{6x}+11x\right)}{1}} && \text{(L'Hospitalden)} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{17\left(6e^{6x}+11\right)}{e^{6x}+11x}} && \text{(L'Hospitalden)} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{17\left(36e^{6x}\right)}{6e^{6x}+11}} \\ &= e^{\frac{17\cdot 36}{6}} \\ &= e^{102}\end{aligned}$$